Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$ **(Puntu 1)**

b) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\lambda^{-n}\right)}{\lambda^{-n}},\ \forall\lambda>0$ **(1.5 puntu)**

a) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} \overset{(Z-E)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}} \overset{(STOLZ)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\ \text{hertsiki gorakorra da, eta,} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\ \text{dibergentea} \end{array}\right\}\Rightarrow \textit{Stolz}\ \text{erabil daiteke}$$

b) $\forall\lambda>0\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\lambda^{-n}\right)}{\lambda^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n\cdot\cos\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$, eta, azter dezagun zati bakoitzaren limitea:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^n=\begin{cases}0 & \forall\lambda<1\\ 1 & \lambda=1\\ \infty & \forall\lambda>1\end{cases}\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda^n}=\begin{cases}\infty & \forall\lambda<1\\ 1 & \lambda=1\\ 0 & \forall\lambda>1\end{cases}\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)\begin{cases}\nexists\ \forall\lambda<1\ \text{baina mugatuta dago}\\ =\cos(1) & \lambda=1\\ =\cos(0)=1 & \forall\lambda>1\end{cases}$$

Orduan, $\forall\lambda>0\quad \lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n\cdot\cos\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)=\begin{cases}0\cdot \textit{mugatua}=0 & \forall\lambda<1\\ 1\cdot\cos(1)=\cos(1) & \lambda=1\\ \infty\cdot 1=\infty & \forall\lambda>1\end{cases}$

2.- Estudiatu hurrengo serieen izaera:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-(n-1)!}{2^{2n}}$ **(Puntu 1)**

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[a^n + \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^{2a}}\right) \right], \quad \forall a > 0$ **(1.5 puntu)**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n!-(n-1)!}{2^{2n}} = \frac{(n-1)!(n-1)}{2^{2n}} \geq 0 \quad \forall n$

D´Alembert irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n}{2^{2n+2}} \cdot \frac{2^{2n}}{(n-1)!\cdot(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^2} = \infty > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

b) $\forall a > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ non $a_n = a^n > 0$ eta $b_n = \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^{2a}}\right) > 0 \quad \forall n$. Honela:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

eta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konbergentea da $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konbergenteak dira.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie geometrikoa da, eta, konbergentea da $\Leftrightarrow \ |r| = a < 1$.

Hau da, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{konbergentea da} \Leftrightarrow a < 1 \\ \text{dibergentea da} \Leftrightarrow a \geq 1 \end{cases}$

$b_n = \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim \frac{1}{n^{2a}}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a}} \begin{cases} \text{konbergentea da} \Leftrightarrow 2a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} \\ \text{dibergentea da} \Leftrightarrow 2a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \begin{cases} \text{konbergentea da} \Leftrightarrow 2a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} \\ \text{dibergentea da} \Leftrightarrow 2a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \begin{cases} \text{konbergentea da} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 1 \\ \text{dibergentea da} \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2} \text{ edo } a \geq 1 \end{cases}$

3.- a) Kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)\cdot x^{3n}$ berretura-seriearen batura, non balio duen adieraziz.

b) Zein da $f^{18)}(0)$-ren balioa, f aurreko atalean lortutako berretura-seriearen batura izanik?

(2.5 puntu)

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)\cdot x^{3n}=S(x)\quad \forall x\in(-R,R)$

Eta, $\forall x\in(-R,R)\quad \int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n+1}\overset{(*)}{=}\dfrac{x}{1+x^3}\quad \forall x\in(-1,1)$

(*) $r=-x^3$ arrazoiko serie geometrikoa; konbergentea $\Leftrightarrow |r|=\left|-x^3\right|<1\Leftrightarrow |x|<1$

Eta, deribatuz:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)\cdot x^{3n}=\frac{1+x^3-3x^3}{\left(1+x^3\right)^2}=\frac{1-2x^3}{\left(1+x^3\right)^2}\quad \forall x\in(-1,1)$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)\cdot x^{3n}=\dfrac{1-2x^3}{\left(1+x^3\right)^2}=f(x)$ bada, orduan $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)\cdot x^{3n}$ berretura-seriea *f* funtzioari dagokion Taylor-en seriea da, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$, beraz $f^{18)}(0)$ x^{18} batugaiaren koefizientean agertuko da, hau da, $3n=18\quad\Leftrightarrow\quad n=6$, eta, orduan:

$$(-1)^6\cdot(18+1)\cdot x^{18}=\frac{f^{18)}(0)}{18!}x^{18}\quad\Leftrightarrow\quad 19=\frac{f^{18)}(0)}{18!}\quad\Leftrightarrow\quad f^{18)}(0)=19\cdot 18!=19!$$

4.- a) Lortu $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Aplikatu garapen hori, baldin badaiteke, $0.1 - \mathrm{L}(1.1)$ **eta** $1.1 - \mathrm{L}(2.1)$ **balio hurbilduak kalkulatzeko, errorea** 10^{-4} **baino txikiagoa izanik.**

(2.5 puntu)

a) $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) = x - g(x)$ non $g(x) = \mathrm{L}(1+x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in (-1,1)$$

(*) $r = -x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura; konbergentea $\Leftrightarrow |r| = |x| < 1$

Eta, integratuz, $g(x) = \mathrm{L}(1+x) \overset{(g(0)=0)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$

$x = -1$ puntuan $\nexists g$

$$x = 1 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists g \text{ eta jarraitua da} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da (Leibniz)} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $g(x) = \mathrm{L}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1]$

Eta, $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) = x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} \quad \forall x \in (-1,1]$

b) $0.1 - \mathrm{L}(1.1) = f(0.1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)10^{n+2}}$, serie alternauta, Leibniz-en teorema egiaztatzen duena, beraz:

$$|f(0.1) - S_n| < |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+3)10^{n+3}} \leq \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow (n+3)10^{n+3} \geq 10^4$$

Eta hau egiaztatzen da $n \geq 1$ bada. Hau da, $n = 1$ hartuz gero:

$$0.1 - \mathrm{L}(1.1) \simeq \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(n+2)10^{n+2}} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} - \frac{1}{3 \cdot 10^3}$$

$1.1 - \mathrm{L}(2.1) = f(1.1)$, baina berretura-seriezko garapenak bakarrik balio du $\forall x \in (-1,1]$, beraz ezin da kasu honetan aplikatu.

<u>OHARRAK</u>:

1) $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) = x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-1,1]$ adierazita uzten badugu, orduan:

$0.1 - \mathrm{L}(1.1) = f(0.1) = 0.1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}(1.1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}$ eta, hemen, berriro, Leibniz-en teorema baino ez dugu erabili behar.

2) $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) = x - g(x)$ deskonposatu beharrean, zuzenean deriba genezake:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

(*) $r = -x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura; konbergentea $\Leftrightarrow |r| = |x| < 1$

Eta, integratuz, $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) \overset{(f(0)=0)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} \quad \forall x \in (-1,1)$

$x = -1$ puntuan $\nexists f$

$$x = 1 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists f \text{ eta jarraitua da} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \text{ konbergentea da (Leibniz)} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$$

Beraz, $f(x) = x - \mathrm{L}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} \quad \forall x \in (-1,1]$, lehen lortutako emaitza bera, noski.